Boletín de Problemas Nº 2

Tema 2:

Herramientas para el Análisis de los Sistemas Paso Banda

Curso 2017 - 2018

Ejercicio 1.

En un enlace inalámbrico de 4km, se transmite una potencia de 20dBW a una frecuencia de 1.8GHz. Suponiendo un modelo de pérdidas en espacio libre, calcule la potencia recibida (en W y en dBW).

Ejercicio 2.

Asuma que existen dos transmisores idénticos al de ejemplo de la lectura previa sobre unidades logarítmicas. Calcule la potencia total transmitida entre los dos.

Ejercicio 3.

Repita el ejercicio anterior asumiendo que la potencia transmitida por cada transmisor es 5mW y que queremos la potencia final en dBW.

Ejercicio 4.

Un transmisor transmite a través del aire una potencia de 1W. En la antena de un receptor se mide la potencia recibida, obteniéndose -40dBm. Calcule la atenuación que sufre la señal enviada durante su viaje por el aire. Si queremos obtener en el receptor una potencia de -15dBm y ponemos un amplificador tras la antena para aumentar la potencia recibida, ¿cuál sería la ganancia, en unidades naturales y en unidades logarítmicas que debería tener el amplificador?

Ejercicio 5.

El sistema de la figura está formado por dos amplificadores de 20 y 15dB de ganancia respectivamente, conectados mediante una línea de 12km de longitud, cuya atenuación es de 2dB/km. Calcular la potencia entregada a la salida, si la potencia de entrada es de 4mW.

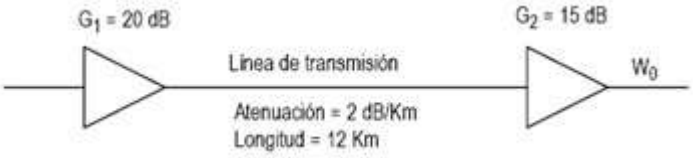

Figura 5.

Ejercicio 6.

¿Qué nivel de potencia debe tener una señal de vídeo cuyo ancho de banda es de 5.2MHz, para que la relación señal a ruido sea de 45dB si el ruido presente es únicamente de tipo térmico?

Ejercicio 7.

Demuestre que las pérdidas en espacio libre, expresadas en dB, se calculan como:

$$L_{bf}(dB) = 92{,}45 + 20\log f(GHz) + 20\log d(km)$$

ó

$$L_{bf}(dB) = 32{,}45 + 20\log f(MHz) + 20\log d(km)$$

Ejercicio 8.

Calcule las componentes de fase y cuadratura de las siguientes señales:

a) Señal ASK (*Amplitude Shift Keying*): $s_i(t) = a_i \cdot g(t) \cdot \cos(w_0 t)$
b) Señal PSK (*Phase Shift Keying*): $s_i(t) = A \cdot g(t) \cdot \cos(w_0 t + \varphi_i)$
c) Señal QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*): $s_i(t) = a_i \cdot g(t) \cdot \cos(w_0 t + \varphi_i)$

Ejercicio 9.

¿Cómo se puede recuperar una señal paso banda a partir de su equivalente paso bajo? Demuéstrelo matemáticamente.

Ejercicio 10.

Utilice un diagrama de fasores para obtener las expresiones de las componentes en fase y cuadratura ($x_i(t)$ y $x_q(t)$) y de la envolvente y fase ($A(t)$ y $\phi(t)$) de la señal paso banda $x(t) = x_1(t) \cdot \cos(w_0 t) + x_2(t) \cdot \cos(w_0 t + \alpha)$.

Ejercicio 11.

Repita el ejercicio anterior para la señal $x(t) = x_1(t) \cdot \cos((w_0 - w_1)t) + x_2(t) \cdot \cos((w_0 + w_1)t)$.

Ejercicio 12.

Una señal paso bajo *x(t)* cuya transformada de Fourier se muestra en la Figura 11(a) pasa por el sistema representado en la Figura 11(b) (donde los bloques *H* representan transformadas de Hilbert). Asumiendo que $W << f_0$, represente en frecuencia las señales obtenidas en cada punto del sistema.

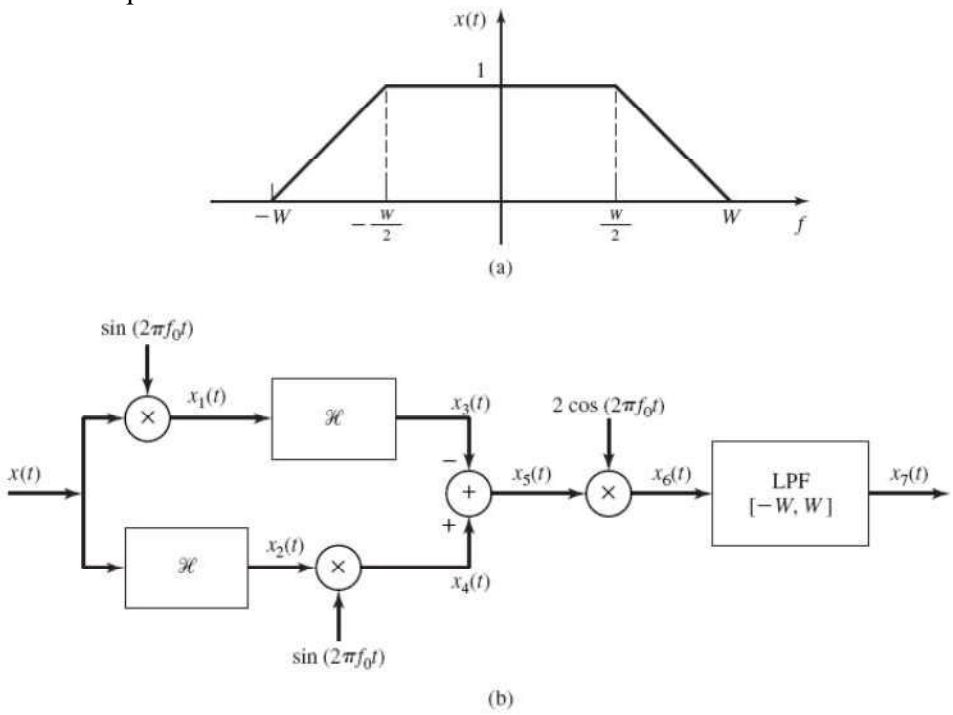

Figura 12.

Ejercicio 13.

Suponga una señal paso banda *x(t)* y una señal paso bajo *m(t)* cuyos espectros no se solapan. Demuestre que la transformada de Hilbert de $c(t) = m(t)x(t)$ es igual a $m(t)\hat{x}(t)$.

Ejercicio 14.

Suponga una señal paso bajo $m(t) = \text{sinc}^2(t)$ y una señal paso banda $x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) - \hat{m}(t)\sin(2\pi f_0 t)$:

a) Calcule la señal analítica asociada a *x(t)* y el equivalente paso bajo de *x(t)*.
b) Calcule y represente la transformada de Fourier de la señal *x(t)*. (Para ello, recuerde que $TF\{m(t)\} = \Lambda(f)$.)
c) Repita los dos apartados anteriores para $x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{m}(t)\sin(2\pi f_0 t)$.

Ejercicio 15.

Suponiendo una frecuencia central f_c = 1200Hz, calcule el equivalente paso bajo y las componentes de fase y cuadratura de la siguiente señal:

$$x(f)=\begin{cases}1 & 900Hz \le |f| < 1300Hz \\ 0 & resto\end{cases}$$

Ejercicio 16. (Parcial 1 10/11)

Dadas las siguientes señales:

$$g(t),\ \text{tal que}\ TF\{g(t)\}=\Pi(f)$$

$$x(t)=2\cdot g(t)\cdot\cos\left(2\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{3}\right) \qquad y(t)=2\cdot g(t)\cdot\sin\left(2\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$p(t)=x(t)+y(t)$$

a) Calcule la señal analítica asociada a $x(t)$ y el equivalente paso bajo de $x(t)$.
b) Calcule la señal $\hat{y}(t)$ (es decir, la Transformada de Hilbert de la señal $y(t)$). Calcule y represente la $TF\{\hat{y}(t)\}$.
c) Utilice un diagrama de fasores para obtener las expresiones de las componentes en fase y cuadratura ($p_i(t)$ y $p_q(t)$) y de la envolvente y fase ($A(t)$ y $\phi(t)$) de la señal $p(t)$.

Nota:
$$\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$$
$$\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$$

Ejercicio 17. (Junio 10/11)

Dada la señal $X(f)$ y suponiendo una frecuencia central f_c = 1200Hz:

$$X(f)=\begin{cases}1 & 1100Hz \le |f| < 1200Hz \\ 0.5 & 1200Hz \le |f| < 1350Hz \\ 0 & resto\end{cases}$$

a) Calcule el equivalente paso bajo de dicha señal.
b) Calcule sus componentes en fase y cuadratura ($x_i(t)$ y $x_q(t)$).
c) Calcule la señal $\hat{x}_i(t)$ (es decir, la Transformada de Hilbert de la señal $x_i(t)$).

Nota: $\prod\left(f/F\right)\xrightarrow{TF^{-1}}F\cdot\mathrm{sinc}(Ft)$

Ejercicio 18. (Parcial 1 11/12)

Una señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(f) = \prod\left(\frac{f}{1000}\right)$ pasa por el sistema representado en la Figura 2 (donde los bloques H representan transformadas de Hilbert). Asumiendo que W = 1KHz y f_0 = 10KHz:

a) Calcule (en tiempo y frecuencia; sólo hasta la señal $x_5(t)$) y represente en frecuencia las señales obtenidas en cada punto del sistema.
b) Calcule la señal analítica asociada a $x_5(t)$ y el equivalente paso bajo de $x_5(t)$.

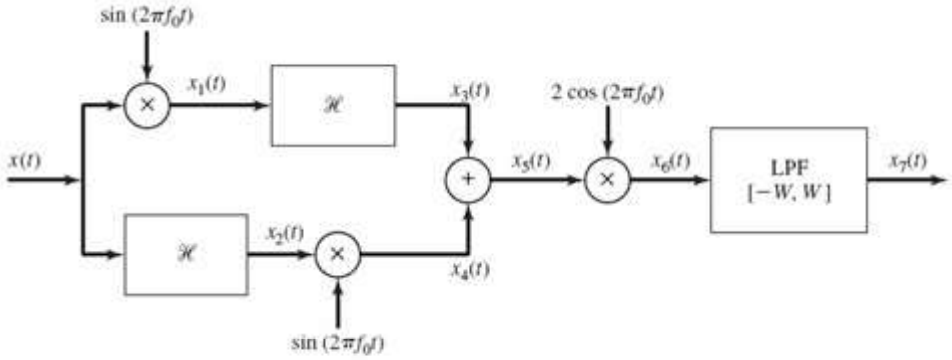

Figura 18.

Nota: Puede dejar las soluciones de este problema en función de $x(t)$ y TH$\{x(t)\}$.

Ejercicio 19. (Junio 11/12)

Dadas las siguientes señales:

$$g(t), \text{ tal que } TF\{g(t)\} = \Pi(f)$$

$$x(t) = 2\cdot g(t)\cdot\cos\left(2\pi\cdot f_0\cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad y(t) = 2\cdot g(t)\cdot\sin\left(2\pi\cdot f_0\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z(t) = -2\cdot g(t)\cdot\cos\left(2\pi\cdot f_0\cdot t - \frac{\pi}{3}\right) \qquad p(t) = x(t) + y(t) + z(t)$$

a) Utilice un diagrama de fasores para obtener las expresiones de las componentes en fase y cuadratura ($p_i(t)$ y $p_q(t)$) y de la envolvente y fase ($A(t)$ y $\phi(t)$) de la señal $p(t)$.
b) Calcule la señal analítica asociada a $x(t)$ y el equivalente paso bajo de $x(t)$.
c) Calcule y represente la $TF\{\hat{g}(t)\}$ (es decir, la Transformada de Fourier de la Transformada de Hilbert de la señal $g(t)$).
d) Calcule la señal $\hat{y}(t)$ (es decir, la Transformada de Hilbert de la señal $y(t)$). Calcule y represente la $TF\{\hat{y}(t)\}$.

Nota:

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$$
$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

Ejercicio 20. (Parcial 1 12/13)

Dada la señal

$$g(t) = 200 \cdot sinc(200t)$$

Y la señal equivalente paso bajo

$$x_{lp}(t) = g(t) \cdot cos(2\pi \cdot 50t) + j \cdot g(t) \cdot sin(2\pi \cdot 50t)$$

a) Suponiendo una frecuencia central $f_0 = 1KHz$, calcule la señal paso banda $x(t)$ y la señal analítica asociada a $x(t)$.
b) Calcule la señal $\hat{x}(t)$ (es decir, la Transformada de Hilbert de la señal $x(t)$). Calcule y represente la $TF\{\hat{x}(t)\}$.
c) ¿Qué significa que una señal paso banda puede llevar dos señales de información multiplexadas en fase y cuadratura? Dibuje el esquema necesario para combinar dos señales de información ($m_1(t)$ y $m_2(t)$, de tipo paso bajo con BW = 200Hz) de forma simultánea en una única señal paso banda $y(t)$ con $f_0 = 1KHz$. Dibuje el esquema necesario para recuperar las dos señales de información ($m_1(t)$ y $m_2(t)$) a partir de la señal $y(t)$.

Justifique todas sus respuestas. Puede dejar la solución de los apartados a) y b) en función de $g(t)$.

Nota:

$$cos(A) \cdot cos(B) = 0.5 \cdot \big(cos(A+B) + cos(A-B)\big)$$
$$sin(A) \cdot sin(B) = 0.5 \cdot \big(cos(A-B) - cos(A+B)\big)$$
$$sin(A) \cdot cos(B) = 0.5 \cdot \big(sin(A+B) + sin(A-B)\big)$$

Ejercicio 21. (Junio 12/13)

Dadas las siguientes señales:

$$g(t), \text{ tal que } TF\{g(t)\} = \Pi(f)$$

$$x(t) = -g(t) \cdot \sin\left(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad y(t) = 2 \cdot g(t) \cdot \sin\left(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad p(t) = x(t) + y(t)$$

a) Utilice un diagrama de fasores para obtener las expresiones de las componentes en fase y cuadratura ($p_i(t)$ y $p_q(t)$) y de la envolvente y fase ($A(t)$ y $\phi(t)$) de la señal $p(t)$.
b) Calcule la señal analítica asociada a $p(t)$ y el equivalente paso bajo de $p(t)$.
c) Calcule y represente la $TF\{\hat{g}(t)\}$ (es decir, la Transformada de Fourier de la Transformada de Hilbert de la señal $g(t)$).
d) Calcule la señal $\hat{y}(t)$ (es decir, la Transformada de Hilbert de la señal $y(t)$). Calcule y represente la $TF\{\hat{y}(t)\}$.

Nota: *cos(A+B) = cos(A) cos(B) - sen(A) sen(B)*
sen(A+B) = sen(A) cos(B) + cos(A) sen(B)

Ejercicio 22. (Parcial 1 13/14)

Determine las diferencias entre filtros ideales y reales. Defina los conceptos de frecuencias de corte (inferior y superior), banda de paso, banda eliminada y ancho de banda del filtro.

Ejercicio 23. (Parcial 1 13/14)

Dada la señal

$$g(t) = 10000 \cdot sinc^2(100t)$$

Y la señal analítica asociada a $x(t)$

$$z_x(t) = g(t) \cdot cos(2\pi \cdot 2050t) + j \cdot g(t) \cdot sin(2\pi \cdot 2050t)$$

a) Suponiendo una frecuencia central $f_0 = 2KHz$, calcule la señal paso banda $x(t)$ y su equivalente paso bajo asociada a $x_{lp}(t)$.
b) Calcule y represente la $TF\{\hat{g}(t)\}$ (es decir, la Transformada de Fourier de la Transformada de Hilbert de la señal $g(t)$).
c) Calcule la señal $\hat{x}(t)$ (es decir, la Transformada de Hilbert de la señal $x(t)$). Calcule y represente la $TF\{\hat{x}(t)\}$.

Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 24. (Parcial 1 14/15)

Dadas las señales paso bajo $g_1(t)$ y $g_2(t)$ (señales paso bajo, de 5KHz de ancho de banda), y las siguientes señales:

$$x(t) = 5 \cdot g_1(t) \cdot \cos\left(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad y(t) = -2 \cdot g_2(t) \cdot \sin\left(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$p(t) = x(t) + y(t)$$

$$s(t) = 5g_1(t)\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + 10g_2(t)\cos\left(2\pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

donde f_0 = 100KHz.

a) Utilice un diagrama de fasores para obtener las expresiones de las componentes en fase y cuadratura ($p_i(t)$ y $p_q(t)$) de la señal $p(t)$.
b) Si se transmite la señal $p(t)$, ¿se podrían recuperar en recepción las señales $g_1(t)$ y $g_2(t)$ por separado? ¿Y si se transmite la señal $s(t)$? (Si en algún caso la respuesta fuera positiva, sugiera cómo se podrían recuperar.)

Ejercicio 25. (Parcial 1 14/15)
Dos señales aleatorias tienen las densidades espectrales de potencia que se representan en la Figura 1 (la frecuencia está en kHz; la altura es A = 1mW/Hz).

a) Para ambas señales, calcule su potencia y el ancho de banda del primer nulo, el ancho de banda a 3dB y el ancho de banda equivalente de ruido.
b) Suponga que ambas señales pasan por un filtro paso bajo ideal de 1.2kHz de ancho de banda. ¿Qué porcentaje de potencia de cada señal se pierde en el filtrado?

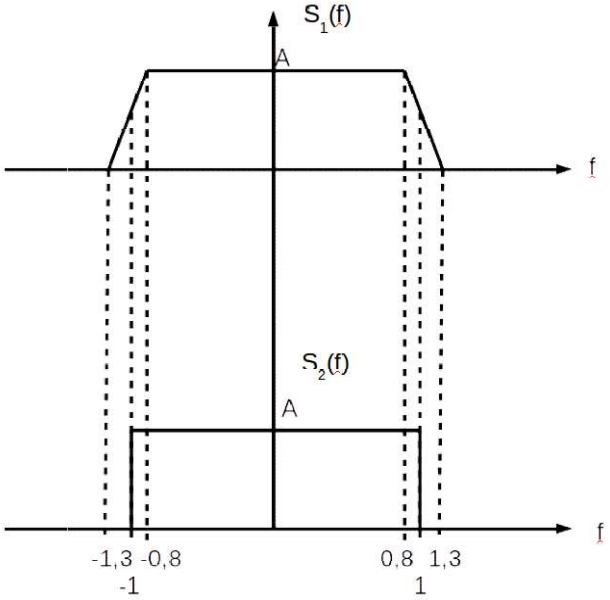

Figura 1.

Ejercicio 26. (Parcial 1 14/15)
Dadas las siguientes señales, justifique cuál de ellas es una señal paso banda; qué señal es una señal analítica y qué señal es una señal equivalente paso bajo:

$$g_1(t) = 50sinc(50t) \qquad g_2(t) = 100sinc^2(10t)$$
$$S_1(t) = g_1(t) - jg_2(t)$$
$$S_2(t) = g_1(t)cos(2\pi 500t) + g_2(t)sin(2\pi 500t)$$
$$S_3(t) = g_1(t)\big(cos(2\pi 500t) + jsin(2\pi 500t)\big) + g_2(t)\big(sin(2\pi 500t) - jcos(2\pi 500t)\big)$$